عادل عقيدي
السنة الثالثة رياضيات
كلية العلوم
قسم الرياضيات

2017 - 10 - 5

المحاضرة الثالثة

الإحداثيات القطبية:

نفرض أن (r, θ) هما الإحداثيات القطبية للنقطة (x, y) عندئذٍ يكون:

(x, y) ، r ، θ

$y = r\sin\theta$ $\qquad$ $x = r\cos\theta$

ومنه فإن العدد العقدي $Z = x + iy$

يكتب على الصيغة $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

وهذه الصورة تدعى الصيغة القطبية للعدد العقدي حيث:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |Z|$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\frac{y}{x}$$

ندعو r: طويلة العدد العقدي Z وهو عبارة عن عدد حقيقي موجب تماماً

ومن العلاقة الثانية نستنتج بأنه لا يوجد تمثيل قطبي للعدد.

العقدي الصفري.

• طويلة العدد العقدي تأخذ قيمة موجبة وحيدة تماماً.

• أما θ : والتي ندعوها عمدة العدد العقدي Z فهي تأخذ عدد غير منته من القيم التي تختلف عن بعضها بمضاعفات صحيحة للعدد 2π

• نرمز لعمدة العدد العقدي Z بـ $\arg Z$

ومن بين هذه الأعداد هناك عدد وحيد ندعوه القيمة الأساسية لعمدة العدد العقدي Z نرمز لهذه القيمة بـ $\arg Z$ وهذه القيمة تحقق المتراجحة التالية:

$$-\pi < \arg Z \leq \pi$$

$$\arg Z = \arg Z + 2n\pi$$

تمرين:

ليكن لدينا العدد العقدي $Z = -1 - i$

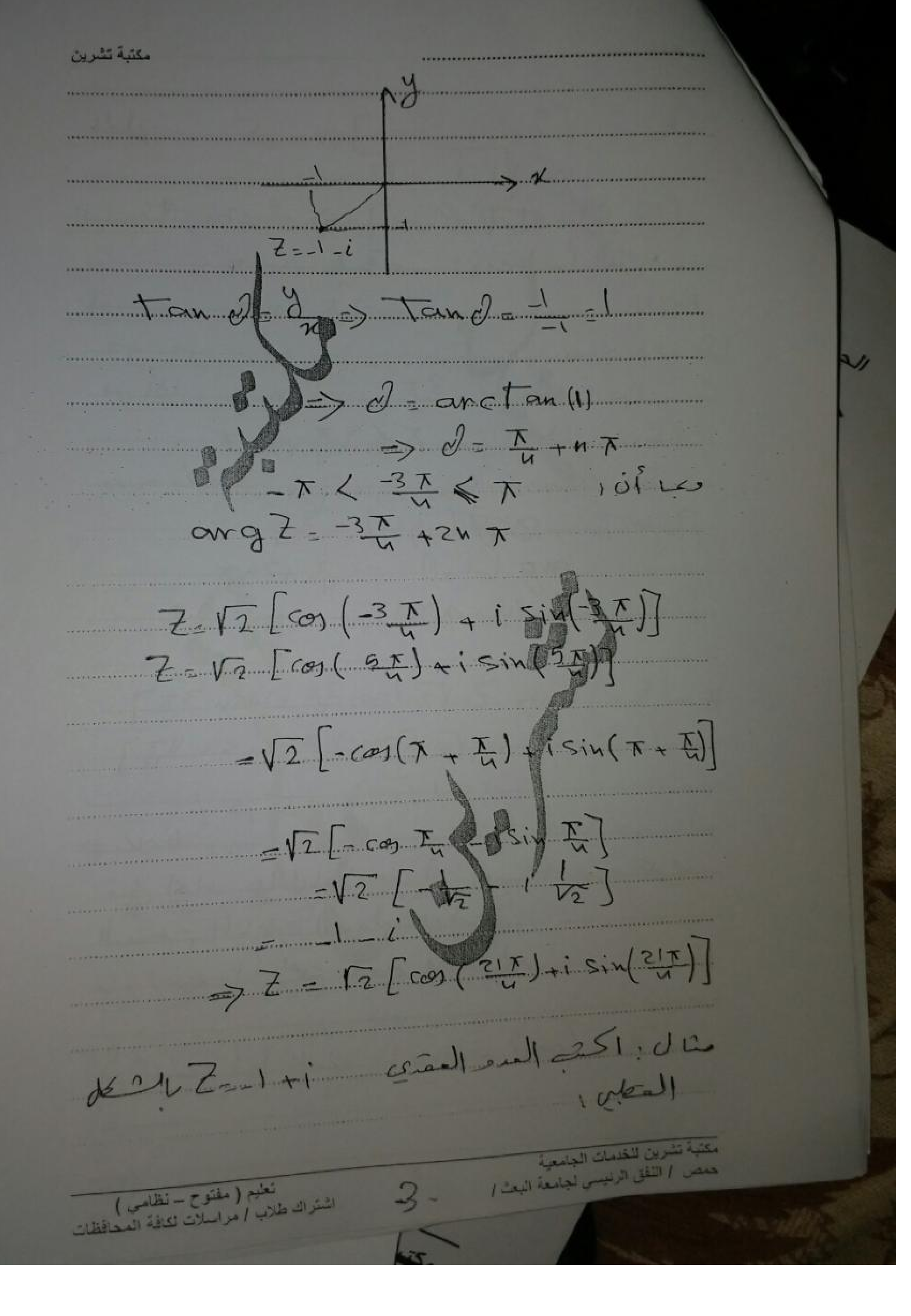
اكتب العدد العقدي Z بالشكل القطبي ما هي القيمة الأساسية لعمدة العدد العقدي

الحل: نعلم أن:

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

حمص / النفق الرئيسي لجامعة البعث /
اشتراك طلاب / مراسلات لكافة المحافظات



$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \frac{-1}{-1} = 1$

$\Rightarrow \theta = \arctan(1)$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + n\pi$

بما أن $-\pi < \frac{-3\pi}{4} \leq \pi$

$\arg Z = \frac{-3\pi}{4} + 2n\pi$

$Z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right]$

$Z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt{2}\left[-\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= \sqrt{2}\left[-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right]$

$= \sqrt{2}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$= -1 - i$

$\Rightarrow Z = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{21\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{21\pi}{4}\right)\right]$

مثال: اكتب العدد العقدي $Z = 1 + i$ بالشكل المثلثي:

الحل:

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\tan\theta = -1 \Rightarrow \theta = \arctan(-1)$

الأصغر نبدأ بالقيم الأساسية $= \frac{3\pi}{4} + n\pi$

أو $-\frac{3\pi}{4} + n\pi$

من أجل $n = 0$ نجد $\theta = \frac{3\pi}{4}$ لأن:

$-\pi < \frac{3\pi}{4} \leq \pi$

ومنه فإن:

$\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$

$\arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$ حيث $n = 0, \mp 1, \ldots$

$\Rightarrow Z = \sqrt{2}\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right]$

$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4}\right]$

ملاحظة:

قبل إيجاد حلول المعادلة $\tan\theta = \frac{y}{x}$ نحدد موقع النقطة المناظرة للعدد العقدي في المستوي فإذا تحققت المتراجحة نعوض في قيم الأساسية

مبرهنة: إذا كانت

$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

و $Z_2 = r_2[\cos\theta_2 + i\sin\theta_2]$

$$Z_1 . Z_2 = r_1 . r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

البرهان:

$$Z_1 . Z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) . r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2 [\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2 + i(\cos\theta_1 . \sin\theta_2 + \sin\theta_1 . \cos\theta_2)]$$

$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

* نتائج:

من المبرهنة السابقة نستنتج أن:

$$|Z_1 . Z_2| = |Z_1| . |Z_2|$$

أما مضمون السعة العقدي:

☆ ---- $\arg(Z_1 . Z_2) = \arg Z_1 . \arg Z_2$

المساواة الأخيرة في الواقع هي مساواة بين مجموعات ونفهمها كما يلي: (أي قيمة اختيارها من $\arg(Z_1 . Z_2)$ يمكن التعبير عن هذه القيم كمجموع قيمتين: القيمة الأولى

$\arg Z_1$ مضاعفات الـ

بين مضاعفات المحصورة $\arg Z_1$

فيتم واحدة محصورة من القيم $\arg Z_2$

ملاحظة: إذا استبدلنا arg بـ Arg في المساواة قد
لا تتحقق المساواة

حيث هي الدالة الرئيسية arc
Arg هي عمدة الرئيسي Z

مثال توضيحي:

لتكن $Z_1 = i$, $Z_2 = -1$

اكتب كل من العددين بالشكل المثلثي

ولاحظ أن المساواة ★ محققة

وبعد ذلك أثبت أن المساواة غير محققة

الحل:

$$Z_1 = i = [\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}]$$

$$Z_2 = -1 = [\cos \pi + i \sin \pi]$$

$$\arg Z_1 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$$

$$\arg Z_2 = \pi + 2n\pi$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = -i = \cos(\pi + \frac{\pi}{2}) + i \sin(\pi + \frac{\pi}{2})$$

$z_1 . z_2 = -i$, $\cot\theta = \infty$

$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} + n\pi$

$\arg z_1 z_2 = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$

$z_1 z_2 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}$

* الشرح: $n=0 \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ لا تحقق مضمون العدد العقدي (مرفوض)

$\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$

من $n=1 \Leftarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$ لا تحقق الشرط

$n=-1$ $\theta = -\frac{\pi}{2}$ مقبول

من اجل $n=1 \Leftarrow$ تكون احدى قيم مضمون العدد العقدي $z_1 . z_2$ هي

$\arg z_1 . z_2 = \frac{3\pi}{2}$

$n=2 \Leftarrow$ تكون احدى مضمون العدد العقدي z_1

$\arg z_1 = \frac{5\pi}{2}$

من اجل $n=-2$ تكون احدى قيم مضمون العدد العقدي z_2 هي

$\arg z_2 = -3\pi$

نلاحظ أن ؛

$$\arg z_1 + \arg z_2 = \arg z_1 z_2 = \frac{3\pi}{2}$$

⇐ ج عادة π مرفوضة

والقيم الأساسية لهم كما يلي:

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 \Rightarrow \operatorname{Arg}(i) = \frac{-\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arg} z_1 \quad \operatorname{Arg}(i) = \frac{-\pi}{2}$$

$$\operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg}(-1) = \pi$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{2} = \operatorname{Arg}(z_1 z_2)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2 \neq \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$$

تذكير

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

مبرهنة

إذا كان

$$z_1 = r_1 [\cos\theta_1 + i \sin\theta_1]$$

$$z_2 = r_2 [\cos\theta_2 + i \sin\theta_2]$$

عندئذ

المحاضرة الخامسة

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

البرهان:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\theta_1+i\sin\theta_1}{\cos\theta_2+i\sin\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\,(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\big[\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2+$$

$$i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)\big]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

* من هذه البرهنة نستنتج أن ،

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|} = \frac{r_1}{r_2}$$

أيضاً ،

$$\arg\frac{Z_1}{Z_2} = \arg Z_1 - \arg Z_2$$

- المساواة هذه هي مساواة بين مجموعات نفهمها بالشكل الآتي (اي قيمة من قيم مضمون العدد يمكن التعبير عن هذه القيم كفرق قيمتين احدهما من قيم مضمون البسط مطروح منها قيمة من قيم مضمون المقام)

* اذا كان

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

عندئذٍ: $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

$$z z^{-1} = 1$$

البرهان:

$$z z^{-1} = \frac{r}{r}[\cos(\theta-\theta) + i\sin(\theta-\theta)]$$
$$= 1[\cos(0) + i\sin(0)]$$
$$= 1$$

* اذا رمزنا للعدد العقدي $e^{i\theta}$ بالرمز الآتي:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

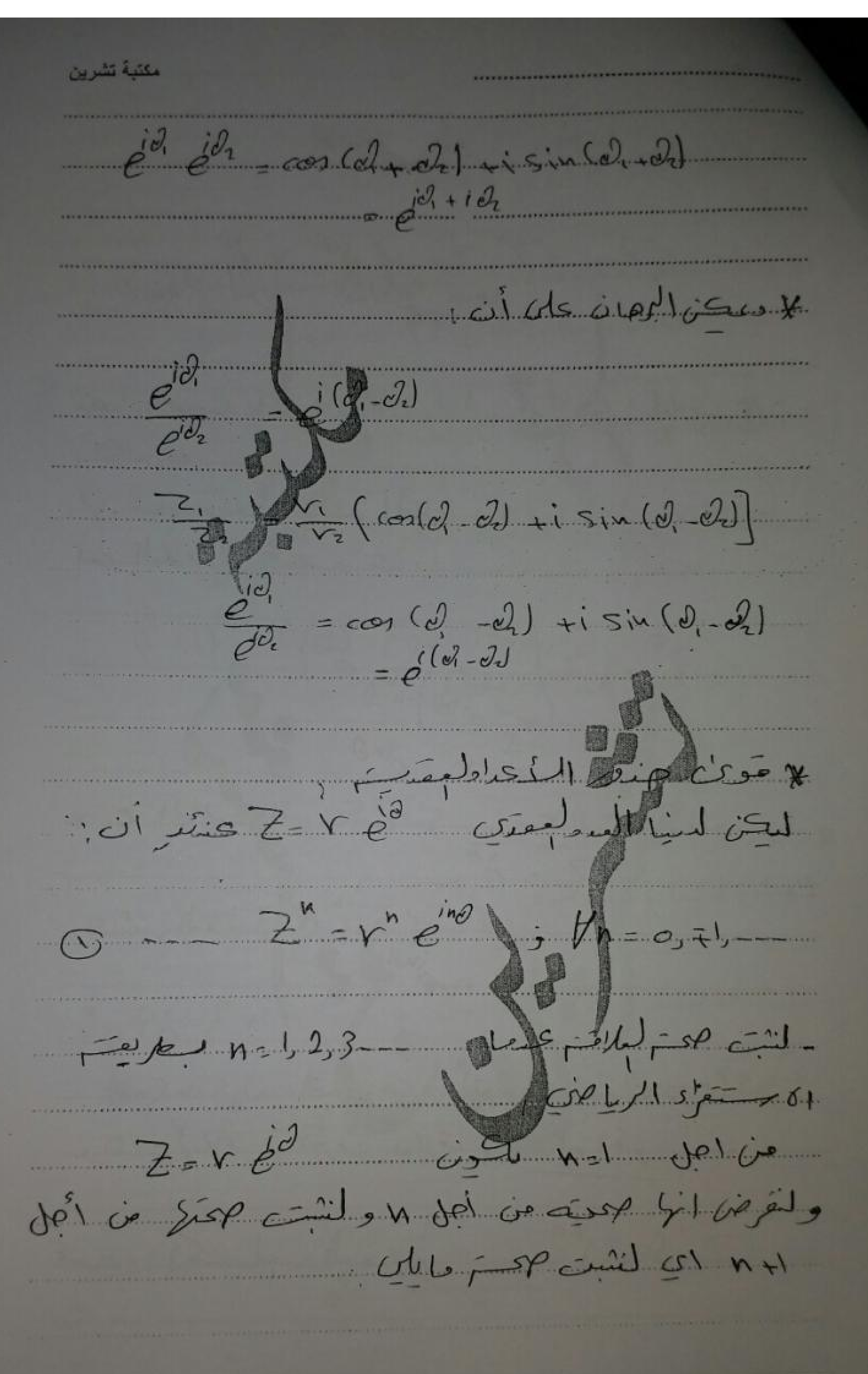
ويدعى علاقة أولر (صيغة أولر) عندئذٍ يكتب العدد العقدي بالشكل: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$: $z = re^{i\theta}$

* ويمكن البرهان على أن:

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

$$z_1 z_2 = r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

عندئذٍ العدد العقدي:



$$e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)$$
$$= e^{i\theta_1 + i\theta_2}$$

* ويمكن البرهان على أن:

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = \cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)$$
$$= e^{i(\theta_1-\theta_2)}$$

* قوى وجذور الأعداد العقدية

ليكن لدينا العدد العقدي $z = re^{i\theta}$ عندئذٍ أن:

$z^n = r^n e^{in\theta}$; $\forall n = 0, \mp 1, ---$ ---- (1)

- لنثبت صحة العلاقة عندما $n = 1, 2, 3, ---$ بطريقة الاستقراء الرياضي

من أجل $n = 1$ يكون $z = re^{i\theta}$

ولنفرض أنها صحيحة من أجل n ولنثبت صحتها من أجل $n+1$ أي لنثبت صحة ما يلي:

$$z^{n+1} = r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}$$

$$z^{n+1} = z^n z = r^n e^{in\theta} \, r e^{i\theta}$$
$$= r^{n+1} e^{i(n\theta+\theta)} = r^{n+1} e^{i(n+1)\theta}$$

اذا وضعنا بالاصطلاح أن $z^0 = 1$ تكون العلاقة (1) صحيحة

لإتمام برهان صحة العلاقة علينا الآن أن نثبت أن العلاقة محققة عندما $n = -1, -2, \dots$

$$z^n = (z^{-1})^{-n} = \left(\frac{1}{r} e^{-i\theta}\right)^{-n}$$
$$= (r^{-1} e^{-i\theta})^{-n}$$
$$= r^n e^{in\theta}$$

* في الحالة التي يكون فيها $r = 1$ أي أن:

$$z = e^{i\theta}$$

عندئذ العلاقة (1) تأخذ شكل:

$$z^n = e^{in\theta}$$

أي أن:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

وهذه العلاقة تعرف بعلاقة دموافر

تمرين: اكتب العدد العقدي: $z = (1+i)^{60}$

بالشكل القطبي $x+iy$

الحل:

نكتب العدد العقدي $1+i$ بالشكل القطبي:

$$1+i = \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$Z = (1+i)^{60} = (2)^{30}\left[\cos\frac{5}{4} + i\sin\frac{5}{4}\right]$$

وبالاستفادة من صيغة ديموافر نجد أن:

$$(1+i)^{60} = (2)^{30}\left[\cos 15\pi + i\sin 15\pi\right]$$

$$= 2^{30}\left[\cos\pi + i\sin\pi\right]$$

$$= -2^{30}$$

* جذور الأعداد العقدية:

لتكن لدينا المعادلة $W = Z^n$ عندئذٍ:

$$Z = W^{\frac{1}{n}}$$

فإذا كانت $Z = re^{i\theta}$ ، $W = \rho e^{i\alpha}$

عندئذٍ:

$$re^{i\theta} = \left(\rho e^{i(\alpha+2\pi)}\right)^{\frac{1}{n}} = \rho^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\alpha+2\pi k}{n}}$$

ومنه نجد أن:

$$r = \rho^{\frac{1}{n}}$$

$$\theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}$$

نستنتج ما يلي:

مما سبق إذا كان لدينا العدد العقدي Z وطلب منا إيجاد جذور من المرتبة n لهذا العدد العقدي أي إيجاد $Z^{\frac{1}{n}}$ عندئذٍ:

① نكتب العدد العقدي Z بالشكل القطبي إن أمكن، أي إذا كان العدد Z بشكل قطبي هو:

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

عندئذٍ الجذور من المرتبة n هي:

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)$$

حيث $k = 0, 1, \dots, n-1$

مثال: أوجد الجذور التربيعية للعدد العقدي:

$$Z = \sqrt{3} + i$$

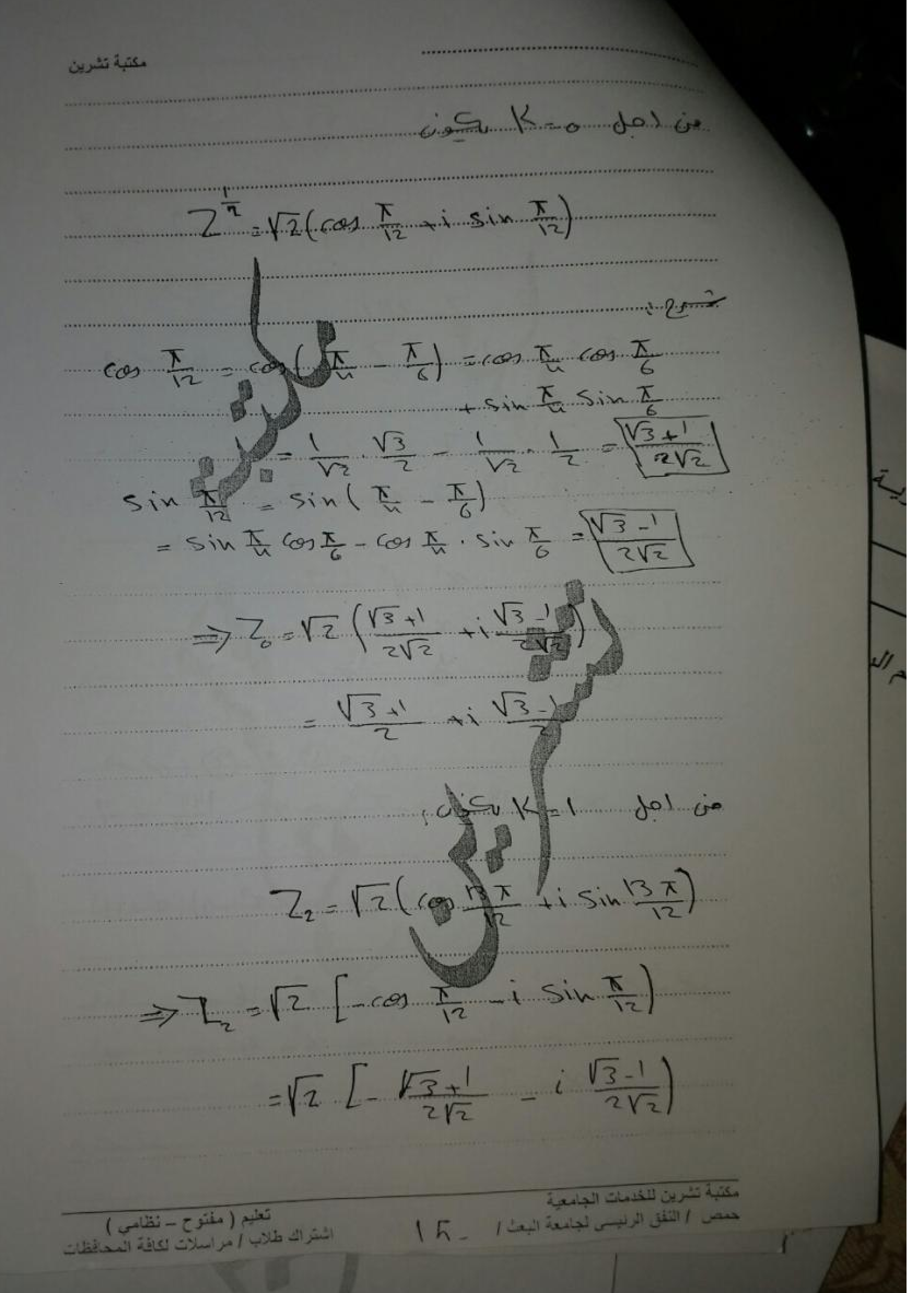
$$Z = r\cos\theta + i\sin\theta$$

$r = \sqrt{3+1} = 2$ ، $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ⇒ $\theta = \frac{\pi}{6}$ (الربع الأول)

$$Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

نعوض في القانون:

$$Z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)$$



من اجل $K=0$ يكون

$$Z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

شرح:

$$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow Z_0 = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

من اجل $K=1$ يكون:

$$Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow Z_2 = \sqrt{2}\left[-\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left[-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{3}+1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

تمرين 2: أوجد الجذر التربيعي للعدد العقدي:

$$Z = -7 - 24i$$

نفرض أن $Z = x + iy$ أحد الجذرين عندئذٍ

$$Z^2 = -7 - 24i$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy = -7 - 24i$$

ومنه فإن:

(1) ...... $x^2 - y^2 = -7$

(2) ...... $2xy = -24$

(3) ...... $y = \frac{-12}{x}$

نعوض (1) و (3) نجد أن:

$$x^2 - \left(\frac{-12}{x}\right)^2 = -7 \Rightarrow x^2 - \frac{144}{x^2} = -7$$

$$x^4 - 7x^2 - 144 = 0 \Rightarrow (x^2 - 9)(x^2 + 16) = 0$$

إما $x^2 + 16 = 0 \Leftarrow x^2 = -16$ مرفوض

أو $x^2 - 9 = 0 \Leftarrow x^2 = 9 \Leftarrow$

$x = -3$ $\qquad$ $x = 3$

وعندئذٍ

صورة

عندما $x=3 \Leftarrow y=4 \Leftarrow$

$z=3-4i$ وهو جذر أول

وعندما $x=3 \Leftarrow y=4 \Leftarrow$

$z=3+4i$ جذر ثاني